U ovoj glavi su izložene neke neposredne posledice Maksvelovih jednačina, ostaljajući trenutno po strani one posledice koje se odnose na energiju i impuls elektromagnetnog polja. Drugi deo teksta ove glave se odnosi na fizičke situacije u kojima jačina električnog polja i magnetnog polja kao i električna i magnetna indukcija nisu neprekidne funkcije. Ispisani su granični uslovi u elektrodinamici u skalarnom i vektorskom obliku.

1. Zakon održanja slobodnih naelektrisanja

Na osnovu “jednačina sa izvorima” pokazuje se saglasnost Maksvelovih jednačina sa jednačinom kontinuiteta naelektrisanja. Formirajmo divergenciju obeju strana četvrte Maxwellove jednačine:

$$div\, rot\mathbf{H} = div\mathbf{j} + div\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \equiv 0\,, \tag{1}$$

pošto je divergencija rotora ma kog vektora identički jednaka nuli. U drugom članu možemo izmeniti redosled operacija i potom $div\mathbf{D}$ zameniti prema prvoj Maxwellovoj jednačini

$$div\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} div\mathbf{D} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\,,$$

pa prethodna jednačina dobija oblik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\mathbf{j} = 0\,. \tag{2}$$

To je jednačina kontinuiteta naelektrisanja, a pošto se ρ i $\mathbf{j}$ odnose na slobodna naelektrisanja, ona izražava *zakon održanja slobodnih naelektrisanja*[1] u diferencijalnom obliku. Bilo bi pogrešno reći da je jednačina kontinuiteta posledica Maksvelovih jednačina. Jednačina kontinuiteta je izraz fundamentalne osobine održanja naelektrisanja, pa bilo koja elektrodinamička teorija mora biti u saglasnosti sa njom.

Ako važe materijalne jednačine u najjednostavnijem obliku

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H},\ \mathbf{j}_s = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{str}\right),$$

<u>van oblasti stranog polja</u>

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}\,, \tag{3}$$

može se dobiti niz daljih polsedica Maxwellovih jednačina. Tada jednačina kontinuiteta i prva Maxwellova jednačina dobijaju oblik

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma\, div\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot grad\,\sigma\,, \tag{4}$$

$$\varepsilon\, div\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot grad\,\varepsilon = \rho\,, \tag{5}$$

to su dve jednačine za određivanje veličina ρ i $\mathbf{E}$ u provodnoj sredini. U specijalnom slučaju kad je $\sigma = const$ i $\varepsilon = const$ eliminacijom $div\mathbf{E}$ nalazimo

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma\, div\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho\,,$$

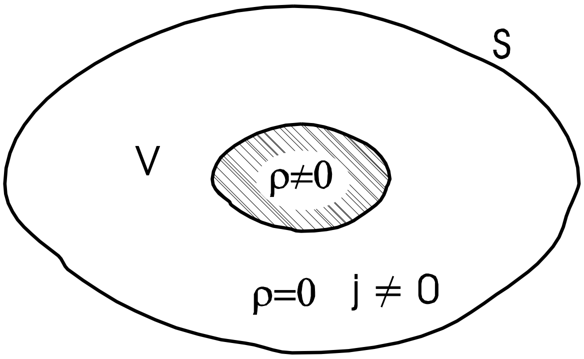
a otuda

[1] Treba naglasiti da se ovaj zakon za vezana naelektrisanja ne može dobiti kao posleica Maxwellovih jednačina, jer pri samom dobijanju ovih jednačina morali smo pretpostaviti važenje ovog zakona za vezana naelektrisanja.

$$\rho(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},0)\, exp[-\frac{\sigma}{\varepsilon}t]\,. \tag{6}$$

To znači da u *provodnoj sredini prostorna gustina slobodnih naelektrisanja opada exponencijalno sa vremenom i to utoliko brže ukoliko je specifična provodljivost veća a dielektrična konstanta manja, sve dok se ne uspostavi stacionarno stanje*.

Postavlja se pitanje da li ovo naizgled protivreči zakonu održanja naelektrisanja. Pri tome treba imati u vidu da može postojati tok struje i u onim oblastima gde je $\rho = 0$. Zamislimo sada neku zatvorenu dovoljno udaljeno površ S (Slika 1) takvu da je u svim njenim tačkama i u izvesnoj oblasti uz nju $\rho = 0$. Pri tome u njenoj unutrašnjosti može postojati i oblast u kojoj je $\rho \neq 0$, tj. u kojoj se nalaze ova slobodna naelektrisanja.



Slika 1. Izračunavanje protoka naelektrisanja kroz površ S

Stavljajući $\mathbf{j} = \sigma\,\mathbf{E}$ i koristeći Gaussovu teoremu[2], možemo naći protok naelektrisanja kroz ovu površ

$$\oint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} = \sigma\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma}{\varepsilon}q(t)\,, \tag{7}$$

gde je $q(t)$ ukupno naelektrisanje unutar obuhvaćene zapremine V u uočenom trenutku t.

S druge strane, smanjenje ovog naelektrisanja u jedinici vremena, na osnovu (6), psole izmene redosleda operacija, biće

$$-\frac{dq}{dt} = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = \frac{\sigma}{\varepsilon}\int_V \rho\, dV = \frac{\sigma}{\varepsilon}q(t)\,. \tag{8}$$

Prema tome, protok slobodnih naelektrisanja kroz graničnu površ jednak je smanjenju obuhvaćenog naelektrisanja u jedinici vremena.

[2] $\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_V q_i$

2. Pomerajne struje

Na osnovu Maxwellovih jednačina i zakona održanja naelektrisanja može se pokazati da sem običnih, kondukcionih struja postoji još jedan oblik struje, tzv. *pomerajna struja*.

Iz četvrte Maxwellove jednačine vidimo da se pored strujne gustine slobodnih naelektrisanja pojavljuje i jedna dopunski član $\partial \mathbf{D} / \partial t$, koji možemo iterpretirati kao *gustinu izvesne dopunske struje.* Ova struja naziva se prema Maxwellu *pomerajna struja*[3], a njenu gustinu označavamo sa

$$\mathbf{j}_{pom} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{9}$$

tako da je gustina ukupne struje

$$\mathbf{j}_{uk} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{pom}. \tag{10}$$

Ispitajmo sada osobine pomerajnih struja. Ako četvrtu Maxwellovu jednačinu napišemo u obliku

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{pom}, \tag{11}$$

zapažamo da se gustina pomerajne struje nalazi u potpuno istom odnosu prema jačini magnetnog polja kao i gustina kondukcione struje. Stoga *pomerajna struja stvara oko sebe magnetno polje i to po istim zakonima kao i kondukciona struja* i zbog ove osobine se ova veličina i tretira kao struja. Međutim, po drugim osobinama pomerajna struja se bitno razlikuje od kondukcione: u oblasti gde jedino ona postoji *nema nikakvog kretanja slobodnih naelektrisanja, može biti samo kretanja vezanih.* Stoga pomeajna struja ne izaziva niz efekata svojstenih kondukcionoj struji, kao što su razvijanje Jouleove toplote i hemijsko dejstvo, ali može biti efekata od kretanja vezanih naelektrisanja[4].

Ako obrazujemo divergenciju obeju strana jednačine (10), posle izmene redosleda operacija imamo

$$div\mathbf{j}_{uk} = div\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} div\mathbf{D}, \tag{12}$$

pa na osnovu prve Maxwellove jednačine i jednačine kontinuiteta dobijamo

$$div\mathbf{j}_{uk} = div\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{13}$$

---

[3] U zavisnosti od specifične provodljivosti i frekvencije promene polja ove dve komponente imaju različit značaj.
U slučaju dobrih provodnika (metali) i pri niskim frekvencijama pomerajna struja je mala i može se zanemariti prema kondukcionoj. Međutim, u slučaju salbih provodnika (izolatori) i pri visokim frekvencijama kondukciona struja se može zanemariti i pomerajna struja igra osnovnu ulogu.

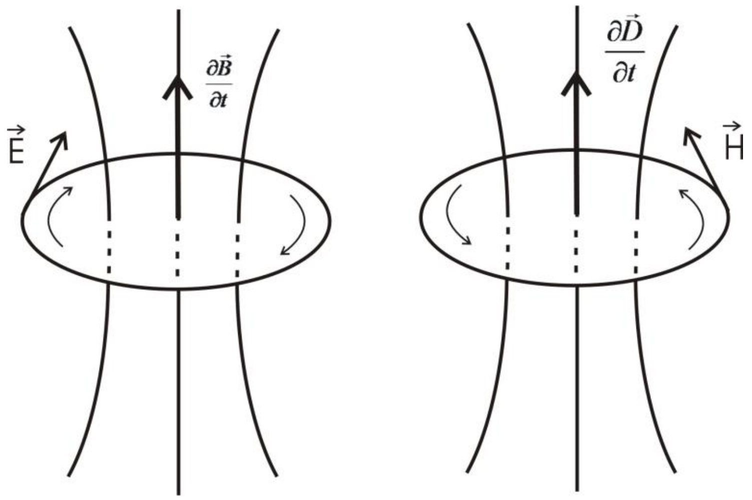
[4] Tako na primer, u slučaju dielektrika sa permanentnim dipolima promena njegove polarizacije praćena je oslobađanjem ili apsorbovanjem izvesne količine toplote, što je čak veoma izrazito pri visokofrekventnim poljima, ali se ova pojava pokorava sasvim drugim zakonitostima nego izdvajanje Jouleove toplote.

Imajući u vidu fizički smisao divergencije, odavde vidimo da su *strujne linije ukupne struje, koju čine kondukciona i pomerajna struja, uvek bezizvorne tj. nemaju ni početka ni kraja*. Ova osobina pomerajnih struja ekvivalentna je zakonu održanja naelektrisanja in a osnovu nje *svako kolo struje može se tretirati kao zatvoreno*.

Da bismo sagledali smisao pomerajne struje, uporedimo je sa pojavom elektromagnetne indukcije. U tom cilju posmatrajmo slučaj kad nema kondukcionih struja, tada treća i četvrta Maxwellova jednačina ima oblik

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad rot\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{14}$$

Odavde vidimo da *svaka promena magnetnog polja stvara električno, a svaka promena električne indukcije stvara magnetno polje, pri čemu linije sila nastalog polja obavijaju linije sila primarnog,* kao što je prikazano na Slici 2. Prva od ovih pojava karakteriše elektromagnetnu indukciju, a druga pomerajnu struju, odakle se neposredno vidi analogija između ove dve fizičke pojave.



Slika 2. Indukovano električno i magnetno polje

Ako izraz (9) za pomerajnu struju na osnovu definicije[5] vektora $\mathbf{D}$ napišemo u razvijenom obliku, možemo ga razviti na dva dela

$$\mathbf{j}_{pom} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}\right), \tag{15}$$

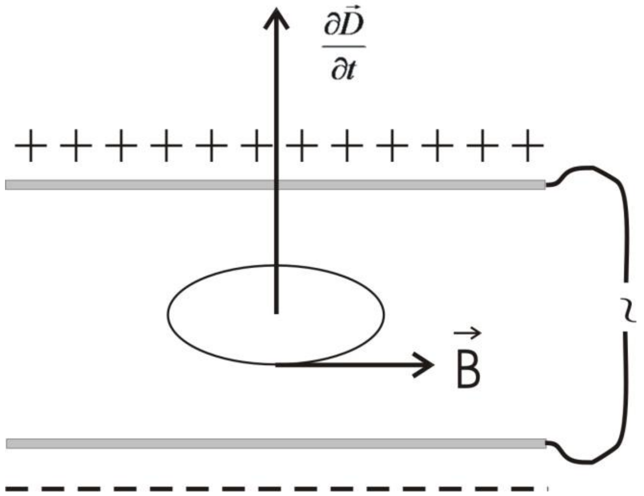
odnosno

$$\mathbf{j}_{pom} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{16}$$

[5] $\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$

Prvi član predstavlja tzv. čistu pomerajnu struju, kad nema polarizacije ($\mathbf{P} = 0$), a drugi dopunsku komponentu usled polarizacije sredine i ovaj član se poklapa sa srednjom strujnom gustinom vezanih naelektrisanja usled polarizacije. Prema tome, *pomerajna struja sastoji se iz dveju komponenti: čiste pomerajne struje, gde nema nikakvog kretanja naelektrisanja i pomerajne struje usled poalrizacije sredine, gde se vrši samo pomeranje vezanih naelektrisanja unutar atoma ili molekula.* Pri tome *magnetno polje svake od ovih komponenti potiče od menjanja odgovarajućeg električnog polja.*

Kao primer navodimo prolazak naizmenične struje kroz ravan kondenzator (Slika 3).



Slika 3. Prolazak naizmenične struje kroz ravan kondenzator

Ovde je u prostoru između ploča $\partial \mathbf{D} / \partial t \neq 0$, pa se tu javlja pomerajna struja u pravcu električnih linija sila. Ova struja proizvodi magnetno polje sa kružnim linijama sila, koje je takvo kao da između ploča kondenzatora svom širinom protiče kondukciona struja iste jačine.

3. Integralni zakoni elektrodinamike

Maksvelove jednačine

$$div\mathbf{D} = \rho, \qquad div\mathbf{B} = 0,$$
$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad rot\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

omogućavaju da se dobiju i odgovarajući integralni zakoni elektrodinamike analogni polaznim osnovnim zakonima.

Ako prvu od ovih jednačina integralimo po proizvoljnoj zapremini V , imaćemo

$$\int_V div\mathbf{D}\, dV = \int_V \rho\, dV\,, \tag{17}$$

a zapreminski integral na levoj strain možemo prema Gausovoj teormi[6] pretvoriti u površinski, čime dobijamo

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho\, dV\,. \tag{18}$$

Ovaj obrazac izražava *generalisani Kulon-Gausov zakon, koji predstavlja uopštenje* Gausove teoreme (pogledati fusnotu 2).

Integralimo sad drugu Maksvelovu jednačinu po proizvoljnoj zapremini

$$\int_V div\mathbf{B}\, dV = 0\,, \tag{19}$$

pa pretvorimo ovaj zapreminski integral prema Gausovoj teoremi u površinski

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0\,. \tag{20}$$

To je *generalisana Aperova hipoteza* kao uopštenje Amperove hipoteze koju smo ranije uveli kada smo govorili o integralnim zakonima elektrodinamike kao postulatima.

Uzmimo sada treću Maksvelovu jednačinu, pa je integralimo po proizvoljnoj otvorenoj površi S

$$\int_S rot\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}\,. \tag{21}$$

Ako površinski integral na levoj strani prema Stoksovoj teoremi[7] pretvorimo u linijski, a na desnoj strani izmenimo red operacija divergencije po vremenu i integriranja po površi, dobićemo

[6] Gausova teorema o pretvaranju površinskih integrala u zapreminske: $\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_V div\mathbf{A}\, dV$.

[7] Stokesova teorema o pretavaranju linijskih integrala u površinske: $\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_S rot\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$.

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \tag{22}$$

jer $\mathbf{B}$ je funkcija i položajai vremena, pa ako se prvo $\mathbf{B}$ integrali po fiksiranoj površi S, dobijeni integral $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ zavisiće samo od vremena, te će izvod tog integrala po vremenu biti običan (a ne parcijalni). Ovaj obrazac izražava *generalisani Faradejev zakon*, koji predstavlja uopštenje Faradayeovog zakona indukcije koga smo ranije uveli kada smo govorili o integralnim zakonima elektrodinamike kao postulatima.

Integralimo, najzad, četvrtu Maksvelovu jednačinu po proizvoljnoj otvorenoj površi

$$\int_S rot\mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}, \tag{23}$$

pa pretvorimo opet površinski integral na levoj strani prema Stokesovoj teoremi u linijski

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}. \tag{24}$$

To je *generalisani Amper-Maksvelov zakon* kao uopštenje Maksvelovog zakona i Amperove teoreme kao postulata elektrodinamike.

Dobijene jednačine predstavljaju *integralne zakone elektrodinamike* i ako indeksima n i t označimo normalne odnosno tangencijalne komponente odgovarajućih vektorskih veličina, gornje jednačine možemo napisati i u obliku

$$\oint_S D_n \, dS = \int_V \rho \, dV, \tag{25}$$

$$\oint_S B_n \, dS = 0, \tag{26}$$

$$\oint_L E_t \, dl = -\frac{d}{dt}\int_S B_n \, dS, \tag{27}$$

$$\oint_L H_t \, dl = \int_S \left(j_n + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS. \tag{28}$$

Ove jednačine karakterišu elektromagnetno polje u relativno malim oblastima i potpuno su ekvivalentne Maxwellovim jednačinama.

4. Grančni uslovi

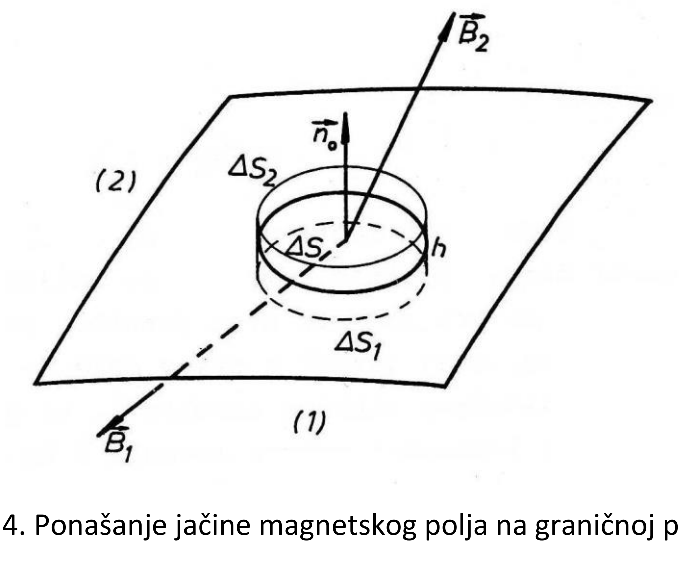
Iz navedenih integralnih zakona mogu se dobiti zaključci o ponašanju električnog i magnetnog polja na graničnim površima dveju sredina. U prethodnim razmatranjima uvek smo prećutno pretpostavljali da su dielektrična konstanta, magnetna permeabilnost i specifična provodljivost neprekidne funkcije položaja i vremena.

Međutim, kad *postoje oštre granične površi* između pojedinih oblasti, ove veličine trpe skok na ovim površima, te Maxwellove jednačine u samim tačkama ovih površi gube svoj smisao. Da bi ustanovili ponašanje jačina električnog i magnetnog polja, moramo poći od integralnih zakona (25-28), koji važe i u ovom slučaju.

Pođimo od drugog od navedenih zakona

$$\oint_S B_n \, dS = 0 \tag{29}$$

i za površ S izaberimo cilindar koji se delimično nalazi u prvoj, a delimično u drugoj sredini sa bazisima paralelnim elementu ΔS granične površi (Slika 4).



Slika 4. Ponašanje jačine magnetskog polja na graničnoj površi.

Za pozitivan pravac normale uzmimo pravac iz prve sredine u drugu, određen jediničnim vektorom $\mathbf{n}_0$ u centru ΔS i pretpostavimo da je ovaj cilindar beskonačno mali, tako da možemo uzeti da normalne komponente vektora $\mathbf{B}$ u svim tačkama bazisa imaju iste vrednosti, naime B_{1n} i B_{2n}. Ako sa ΔS_1 i ΔS_2 označimo površine bazisa cilindra, sa h nhegovu visinu, sa l obim preseka cilindra, a sa $\overline{B}_{(n)}$ srednju vrednost normalne komponente vektora $\mathbf{B}$ na bočnoj površini cilindra, prema gornjem obrascu i slici imamo

$$B_{2n}\Delta S_2 - B_{1n}\Delta S_1 + \bar{B}_{(n)} l\, h = 0\,. \qquad (30)$$

Pustimo sad da h teži nuli, tada zadnji član ove jednačine otpada, pa dobijamo

$$B_{2n}\Delta S - B_{1n}\Delta S = 0\,, \qquad (31)$$

a otuda

$$B_{2n} = B_{1n}\,, \qquad (32)$$

što možemo izraziti i pomoću jediničnog vektora normale $\mathbf{n}_0$, stavljajući $B_n = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{B}$

$$\mathbf{n}_0 \cdot \left(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1\right) = 0\,. \qquad (33)$$

Normalne komponente magnetne indukcije pri prelazu kroz graničnu površ menjaju se kontinuirano.

Uzmimo sada prvi integralni zakon (25)

$$\oint_S D_n\, dS = \int_V \rho\, dV \qquad (34)$$

i za površ S izaberimo opet isti cilindar kao u prethodnom slučaju. Ako sa Δq označimo količinu naelektrisanja u unutrašnjosti ovog cilindra, biće

$$\int_V \rho\, dV = \Delta q = \bar{\rho}\,\Delta S\, h\,, \qquad (35)$$

pa sa analognim oznakama imamo

$$D_{2n}\Delta S_2 - D_{1n}\Delta S_1 + \bar{D}_{(n)} l\, h = \bar{\rho}\,\Delta S\, h\,. \qquad (36)$$

Ako pretpostavimo da h teži nuli, poslednji član na levoj strani otpada, dok izraz na desnoj strani u opštem slučaju ne mora težiti nuli. Uvedimo stoga oznaku

$$\eta = \lim_{h\to 0}\left(\bar{\rho}\, h\right), \qquad (37)$$

a pošto je

$$\bar{\rho}\, h = \frac{\Delta q}{\Delta V} h = \frac{\Delta q}{\Delta S\, h} h = \frac{\Delta q}{\Delta S}\,, \qquad (38)$$

biće

$$\eta = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S} \qquad (39)$$

odakle vidimo da η predstavlja *površinsku gustinu*, tj. naelektrisanje po jedinici površine. Tada prethodna jednačina dobija oblik

$$D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S = \eta\,\Delta S\,, \qquad (40)$$

odnosno

$$D_{2n} - D_{1n} = \eta\,, \qquad (41)$$

što možemo napisati i u vektorskom obliku, na sličan način kao i malopre

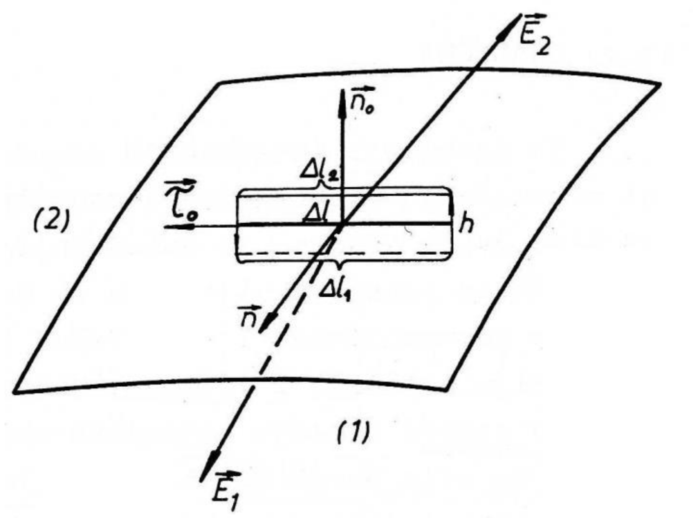
$$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \eta \,. \tag{42}$$

Normalne komponente vektora električne indukcije pri prolazu kroz graničnu površ trpe skok za vrednost površinske gustine na tom mestu. Ako nema slobodnih površinskih naelektrisanja, tj. ako je $\eta = 0$, biće $D_{2n} = D_{1n}$.

Primenimo sad treći integralni zakon (27), izmenivši u njemu red operacija

$$\oint_L E_t \, dl = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \tag{43}$$

i za konturu L izaberimo konturu koja se delimično nalazi u prvoj, a delimično u drugoj sredini sa stranama paralelnim linijskom elementu Δl na graničnoj površi (Slika 5).



Slika 5. Ponašanje jačine električnog polja na graničnoj površi.

Za pozitivan pravac tangente uzmimo orijentisani pravac prikazan na slici, određen jediničnim vektorom tangente $\boldsymbol{\tau}_0$, u centru duži Δl i pretpostavimo da je ova kontura beskonačno mala, tako da možemo uzeti da tangencijalne komponente vektora $\mathbf{E}$ u svim tačkama paralelnih strana imaju iste vrednosti, naime E_{1t}, odnosno E_{2t}. Ako sa Δl_1 i Δl_2 označimo dužine paralelnih strana konture, sa h dužinu bočne strane, sa $\bar{E}_{(t)}$ srednju vrednost tangencijalne komponente vektora $\mathbf{E}$ na bočnim stranama konture, a sa $\overline{\partial B_n / \partial t}$ srednju vrednost veličine $\partial B_n / \partial t$ na površi oivičenoj posmatranom konturom, prema gornjem obrascu i slici imamo

$$E_{2t}\Delta l_2 - E_{1t}\Delta l_1 + \bar{E}_{(t)}\, 2h = -\overline{\frac{\partial B_n}{\partial t}} \Delta l \, h \,. \tag{44}$$

Pustimo sa da h teži nuli; zadnji član na levoj i član na desnoj strani otpadaju, pa dobijamo

$$E_{2t}\Delta l - E_{1t}\Delta l = 0\,, \tag{45}$$

a otuda

$$E_{2t} = E_{1t}\,. \tag{46}$$

Ovde treba imati u vidu da su E_{1t} i E_{2t} *algebarske vrednosti* tangencijalnih komponenti, orijentisanih kao na slici, tako da se pri prolazu kroz graničnu površ *menja njihova orijentacija*. Ovaj granični uslov se takođe može izraziti pomoću jedinilnog vektora normale $\mathbf{n}_0$ na graničnu površ, ako uvedemo i jedinični vektor normale $\mathbf{n}$ na površ ove konture. Tada je prema slici $\boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{n}\times\mathbf{n}_0$, pa se tangencijalna komponenta može napisati u vidu

$$E_t = \boldsymbol{\tau}_0\cdot\mathbf{E} = \mathbf{E}\cdot\left(\mathbf{n}\times\mathbf{n}_0\right) = \mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{n}_0\times\mathbf{E}\right), \tag{47}$$

čime gornji uslov dobija oblik

$$\mathbf{n}\cdot\left[\mathbf{n}_0\times\left(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1\right)\right] = 0\,. \tag{48}$$

Pošto ova relacija mora da važi za svaku orijentaciju $\mathbf{n}$ ove konture, odavde proizilazi

$$\mathbf{n}_0\times\left(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1\right) = 0 \tag{49}$$

što predstavlja traženi vektorski oblik gornjeg graničnog uslova.

Tangencijalne komponente jačine električnog polja pri prolazu kroz graničnu površ menjaju se kontinuirano.

Iskoristimo, najzad, i četvrti integralni zakon (28)

$$\oint_L H_t\,dl = \int_S\left(j_n + \frac{\partial D_n}{\partial t}\right)dS \tag{50}$$

i za konturu L izaberimo opet istu konturu kao u prethodnom slučaju. Sa analognim oznakama tada imamo

$$H_{2t}\Delta l_2 - H_{1t}\Delta l_1 + \overline{H}_{(t)}\,2h = \overline{j}_n\Delta l\,h + \overline{\frac{\partial D_n}{\partial t}}\Delta l\,h\,, \tag{51}$$

pa pustimo da h teži nuli, poslednji članovi na levoj i desnoj strani otpadaju, dok prvi član na desnoj strain <u>u opštem slučaju ne mora težiti nuli</u>. Uvedimo stoga oznaku

$$I_n = \lim_{h\to 0}\left(\overline{j}_n\,h\right) = \lim_{h\to 0}\left[\left(\overline{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{n}\right)h\right] = \mathbf{n}\cdot\lim_{h\to 0}\left(\overline{\mathbf{j}}\cdot h\right) \tag{52}$$

ili

$$I_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{I},\quad \mathbf{I} = \lim_{h\to 0}\left(\mathbf{j}\cdot h\right), \tag{53}$$

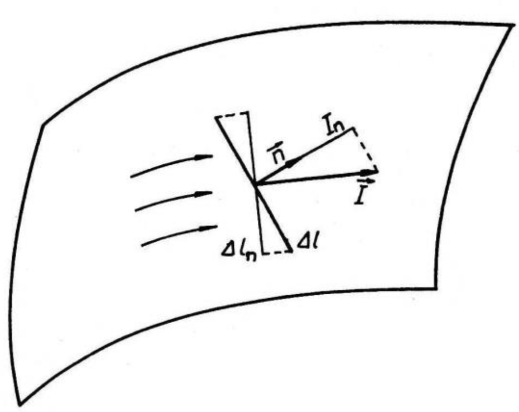
pa označavajući sa ΔI jačinu struje kroz površ konture, a sa Δl_n projekciju duž Δl na pravac normalan na vektor $\mathbf{I}$ (Slika 6), imaćemo

$$\bar{j}\,h = \frac{\Delta I}{\Delta S_n} h = \frac{\Delta I}{\Delta l_n\, h} h = \frac{\Delta I}{\Delta l_n}, \tag{54}$$

odnosno

$$I_n = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta l_n} . \tag{55}$$

Odavde vidimo da $\mathbf{I}$ predstavlja *površinsku strujnu gustinu*[8] čiji intenzitet daje jačinu struje koja teče po graničnoj površi po jedinici dužine normalno postavljene na pravac ove površinske struje



Slika 6. Linijska strujna gustina površinskih struja.

Tada prethodna jednačina dobija oblik

$$H_{2t}\Delta l - H_{1t}\Delta l = I_n\, \Delta l \ , \tag{56}$$

odnosno

$$H_{2t} - H_{1t} = I_n \ . \tag{57}$$

Ovaj uslov se takođe može napisati i u vektorskom obliku, na sličan način kao i u prethodnom slučaju

$$\mathbf{n} \cdot \left[\mathbf{n}_0 \times \left(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \right) \right] = I_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}, \tag{58}$$

a otuda, pošto ova jednakost mora da važi za svako $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n}_0 \times \left(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \right) = \mathbf{I} . \tag{59}$$

Ovako formulisan ovaj granični uslov ima to preimućstvo da je nezavisan od proizvoljnosti u izboru jediničnog vektora $\boldsymbol{\tau}_0$ na graničnoj površini.

---

[8] U knjizi profesora B. Milića, *Meksvelova elektrodinamika*, na strani 119, piše da je ovo *linijska gustina površinskih struja*.

Prema tome: *tangencijalne komponente vektora jačine magnetnog polja pri prolazu kroz graničnu površ trpe skok za vrednost linijske gustine površinskih strujna na tom mestu.* Ako nema površinskih struja, tj. ako je $I = 0$, biće $H_{2t} = H_{1t}$.

Dobijene relacije u skalarnom obliku

$$\begin{aligned} B_{2n} &= B_{1n}, \qquad & D_{2n} - D_{1n} &= \eta, \\ E_{2t} &= E_{1t}, \qquad & H_{2t} - H_{1t} &= I_n \end{aligned} \tag{60}$$

ili odgovarajuće relacije izražene pomoću jediničnog vektora normale

$$\mathbf{n}_0 \cdot \left(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1\right) = 0, \tag{61}$$

$$\mathbf{n}_0 \cdot \left(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1\right) = \eta, \tag{62}$$

$$\mathbf{n}_0 \times \left(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\right) = 0, \tag{63}$$

$$\mathbf{n}_0 \times \left(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1\right) = \mathbf{I} \tag{64}$$

nazivaju se *granični uslovi u elektrodinamici*[9]. Oni delimično određuju ponašanje elektromagnetnog polja na graničnim površinama dveju sredina u tom polju, gde karakteristike sredina ε, μ i σ trpe skok. Pri tome podvucimo da ove granične uslove treba razlikovati od graničnih uslova posmatranog elektromagnetnog polja, koji definišu ponašanje električnog i magnetnog polja na graničnoj površi posmatrane obalsti i koji moraju biti unapred poznati.

Što se tiče ostalih komponenata vektora $\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$, njih možemo naći samo ako znamo materijalne jednačine svake sredine u tom polju. Ako one imaju jednostavan oblik[10] , tada na osnovu relacija (60) imamo

$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}, \tag{65}$$

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \eta, \tag{66}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_2} D_{2t} = \frac{1}{\varepsilon_1} D_{1t}, \tag{67}$$

$$\frac{1}{\mu_2} B_{2t} - \frac{1}{\mu_1} B_{1t} = I_n, \tag{68}$$

čime je u potpunosti određeno ponašanje svih komponenata jačine polja i vektora indukcije na graničnim površinama.

---

[9] Uslovi na granici dve supstancijalne sredine.

[10] $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ i $\mathbf{j}_s = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{str}\right)$.

Iz izraza za zapreminsku gustinu polarizacionog (vezanog) naelektrisanja

$$div\mathbf{P} = -\rho_{vez} \tag{69}$$

sledi

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{vez}\,. \tag{70}$$

Normalna komponenta vektora polarizacije na granici dveju sredina ima skok ukoliko se na njoj nalaze površinska vezana naelektrisanja.

Analogno, iz izraza za zapreminsku gustinu vezanih struja (struje vezanih naelektrisanja) koja je jednaka zbiru magnetizacione i polarizacione struje

$$\mathbf{j}_{vez} = rot\mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \tag{71}$$

sledi izraz za skok tangencijalne komponente[11] magnetizacije

$$\mathbf{M}_{2t} - \mathbf{M}_{1t} = \mathbf{I}_{vez}\,. \tag{72}$$

[11] Proizvoljan vektor $\mathbf{A}$ možemo razložiti na normalnu i tangencijalnu komponentu u odnosu na ort $\mathbf{n}$ na sledeći način

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_t$$

gde je

$$\mathbf{A}_n = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$$

i

$$\mathbf{A}_t = (\mathbf{n}\times\mathbf{A})\times\mathbf{n}\,.$$